

SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA  
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

V. SCORNAZZANI

UNA DISUGUAGLIANZA DI HARNACK PER I MINIMI  
DI ALCUNI FUNZIONALI DEGENERI

18 FEBBRAIO 1988

In questo seminario si prova una disuguaglianza di Harnack per i minimi non negativi di funzionali del tipo

$$(1) \quad \mathcal{F}(u, \Omega) = \int_{\Omega} F(x, Du) dx \quad D = \left( \frac{\delta}{\delta x_1}, \dots, \frac{\delta}{\delta x_n} \right)$$

con  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aperto e  $F$  funzione di Carothedory che soddisfa la condizione

$$(2) \quad M^{-1}w(x) \left( \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 p_j^2 \right)^{m/2} \leq F(x, p) \leq Mw(x) \left( \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 p_j^2 \right)^{m/2}$$

dove  $M > 0$ ,  $m > 1$  e  $w$  è una opportuna funzione peso non-negativa, nel senso di Muckenhoupt, e  $\lambda_j, j=1, \dots, n$  sono funzioni non-negative soddisfacenti alle stesse ipotesi di [FL1] [FL2].

Indichiamo con  $W^1(\Omega)$  la chiusura di  $Lip(\Omega)$  rispetto alla norma

$$\|u, Wu^1(\Omega)\| = \left( \int_{\Omega} |u|^m w dx \right)^{1/m} + \left( \int_{\Omega} |\nabla_{\lambda} u|^m w dx \right)^{1/m}$$

dove

$$\nabla_{\lambda} = \left( \lambda_1 \frac{\delta}{\delta x_1}, \dots, \lambda_n \frac{\delta}{\delta x_n} \right).$$

Diamo la seguente definizione:

Definizione 1. Diciamo che  $u \in W_m^1(\Omega)$  è un minimo per  $\mathcal{F}(\cdot, \Omega)$  e per ogni  $\phi \in W_m^1(\Omega)$ ,  $\text{supp } \phi \subset \Omega$ ,

$$(3) \quad \mathcal{F}(u, \text{supp } \phi) \leq \mathcal{F}(u + \phi, \text{supp } \phi)$$

Nel caso  $\lambda_j \equiv 1$  e  $w \equiv 1$  Di Benedetto e Trudinger ([BT]) hanno dimostrato la disuguaglianza di Harnack per i minimi non negativi. Successivamente

Modica ([M]) ha esteso questi risultati al caso  $\lambda_j \equiv 1$  e  $w$  funzione peso verificante la condizione di Muckenhaup:  $w \geq 0$  ed esistono  $p > 1$ ,  $c_w = c(w, p) \geq 1$  tali che per ogni sfera euclidea  $S_R$  di raggio  $R$ ,  $S_R \subset \Omega$ , risulta

$$(4) \quad \left( \frac{1}{|S_R|} \int_{S_R} w dx \right) \left( \frac{1}{|S_R|} \int_{S_R} w^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{p-1} \leq c_w$$

dove  $|S_R|$  è la misura di Lebesgue di  $S_R$ .

I risultati di questi lavori non si applicano a funzionali che degenerano non uniformemente come, ad esempio

$$F(x, y, D_x u, D_y u) = (|D_x u|^2 + |x|^{2\sigma} |D_y u|^2)^{m/2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, \quad \sigma > 0$$

che è invece possibile trattare dotando  $\mathbb{R}^n$  di una metrica che tenga conto della particolare non uniforme degenerazione della funzione  $F$  (e quindi della  $\lambda_j$ ). Metriche siffatte sono state introdotte e studiate da molti autori, si vedano, ad esempio [FL1], [FL2], [FL3], [NSW].

Sostituendo alla metrica euclidea la metrica suddetta  $d$ , è possibile adottare le tecniche di Di Benedetto e Tundinger e di Modica allo studio di funzionali del tipo (1), (2).

Risulta naturale richiedere al peso  $w$  di verificare la condizione di Muckenaupt rispetto alla metrica  $d$ , sostituendo l'ipotesi (4) con la seguente:  $w \geq 0$ , esistono  $p > 1$ ,  $c_w = c(w, p) \geq 1$ , tali che per ogni  $B_R \subset \Omega$  risulta

$$(5) \quad \left( \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} w dx \right) \left( \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} w^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{p-1} \leq c_w$$

dove  $B_R$  è la  $d$ -sfera di raggio  $R$ . Ne verrà che i nostri risultati si applicano anche, ad esempio, al caso seguente

$$F(x, y, D_x u, D_y u) = (|D_x u|^2 + |x|^{2\sigma} |D_y u|^2)^{m/2} \|(x, y)\|^\alpha, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, \quad \sigma > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Le ipotesi cui devono soddisfare le funzioni  $\lambda_j$  sono:

- i)  $\lambda_j \geq 0$ ,  $\lambda_1 \equiv 1$ ,  $\lambda_j(x) = \lambda_j(x_1, \dots, x_{j-1}) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $j = 1, \dots, n$
- ii) posto  $\pi = \{x \in \mathbb{R}^n / \prod_{k=1}^n x_k = 0\}$ , allora
- $$\lambda_j \in C(\mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n - \pi), \quad 0 < \lambda_j(x) \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n - \pi, \quad j=1, \dots, n$$
- $$\lambda_j(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{j-1}) = \lambda_j(x_1, \dots, -x_i, \dots, x_{j-1}) \quad j = 2, \dots, n, \quad i=1, \dots, j-1$$
- iii) esistono  $\rho_{ij} \geq 0$  tali che

$$0 \leq x_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda_j(x)) \leq \rho_{ji} \lambda_j(x) \quad j = 2, \dots, n, \quad i = 1, \dots, j-1$$

Tali ipotesi consentono, appunto di costruire una metrica d "naturale" per il funzionale, associato ai campi  $\pm X_j = \pm \lambda_j \frac{\partial}{\partial x_j}$   $j = 1, \dots, n$  definita così:  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  consideriamo la famiglia  $\Gamma$  di tutte le curve  $\gamma: [0, T_\gamma] \rightarrow \mathbb{R}$  che siano  $C^1$  a tratti e tali che ogni tratto  $C^1$  sia curva integrale di uno dei campi  $\pm X_j$ , e che congiungano  $x$  con  $y$ , allora:

$$d(x, y) = \inf \{T_\gamma / \gamma \in \Gamma\} \quad (\text{si dimostra che } \forall x, y \in \Omega \quad \exists \gamma \in \Gamma \text{ che congiunge } x \text{ con } y).$$

Nel precedente seminario ([S]) avevo provato che se  $u \in W_m^1(\Omega)$  è un minimo per il funzionale (1) (2), allora  $u$  e  $-u$  appartengono a una classe di De Giorgi  $DG_m(\Omega)$  la cui definizione è:

Definizione 2.  $u \in W_m^1(\Omega)$  appartiene alla classe di De Giorgi  $DG_m(\Omega)$  se per ogni d-sfera  $B_R \subset \Omega$  e per ogni  $\rho > 0$ ,  $p < R$ ,  $k \in \mathbb{R}$  si ha

$$\int_{B(K,\rho)} |\nabla_\lambda u|^m w dx \leq \frac{C}{(R-\rho)^m} \int_{B(K,R)} |u-K|^m w dx$$

dove  $B(K,R) = \{x \in B_R / u(x) > K\}$  e  $B_\rho$  è la sfera di raggio  $\rho$  concentrica a  $B_R$ .

Qui proviamo che se  $u$  e  $-u \in DG_m(\Omega)$ ,  $u \geq 0$ , allora soddisfa alla disuguaglianza di Harnack, e precisamente

Teorema 3. Sia  $u, -u \in DG_m(\Omega)$ ,  $u \geq 0$  allora esiste una costante  $C$  dipendente da  $m, M, w, \lambda_j$  e da  $\bar{x}$  tale che per ogni  $d$ -sfera  $B(\bar{x}, R) \equiv B_R$ , con  $B_{8R} \subset \Omega$ , si ha:

$$\sup_{B_{R/2}} u \leq C \inf_{B_{R/2}} u$$

Nella dimostrazione del Teorema 3 si lavora sullo spazio  $(R^n, d, w(x)dx)$  che risulta omogeneo, valendo per la misura  $w(x)dx$  la *proprietà di duplicazione*: esiste una costante  $\beta \equiv \beta(p, c(u, p), d)$  tale che

$$w(B_{2R}) \leq \beta w(B_R)$$

essendo  $w(B_R) = \int_{B_R} w(x)dx$  (si veda [FS], Lemma 2.10).

Punto fondamentale di tale dimostrazione è l'applicazione di un lemma di Krylov-Safanov ([KS]) che tali autori dimostrano nel caso euclideo; nel nostro caso la dimostrazione ha dovuto subire notevoli varianti; potendosi contare solo sul fatto che  $(R^n, d, w(x)dx)$  è omogeneo; tale fatto ha pesato abbondantemente sulla dimostrazione del Lemma.

Lemma 3. (di ricoprimento di tipo Krylov-Safanov). Sia  $B_R$   $d$ -sfera,  $E \subset B_R$ ,  $\delta \in ]0, 1[$  fissato

$$\mathcal{B} = \{B(x, \rho) \cap B_R / x \in B_R, \rho > 0, w(E \cap B(x, \rho)) \geq \delta w(B(x, \rho) \cap B_R)\}$$

Consideriamo l'insieme

$$E_\delta = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$$

allora si ha una delle due possibilità:

$$i) \quad E_\delta = B_R$$

$$ii) \quad w(E) \leq C\delta w(E_\delta)$$

con  $C > 1$  dipendente dalla costante di duplicazione di  $w(x)dx$

Dimostrazione. Se  $w(E) \geq \delta w(B_R)$  allora  $w(E \cap B_R) = w(E) \geq \delta w(B_R)$  e quindi  $B_R$  è una delle sfere che definiscono  $E_\delta$  per cui vale la i).

Sia ora  $w(E) < \delta w(B_R)$ ; se  $w(E) = 0$  è ovvia la ii), sia perciò  $w(E) > 0$ , non è restrittivo supporre che ogni punto di  $E$  sia punto di Lebesgue ([C]) e cioè tale che

$$(6) \quad \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{w(E \cap B(x, r))}{w(B(x, r))} = 1$$

In ciò che segue diremo che  $B(x, \rho)$  interseca  $E$  in modo consistente se  $w(E \cap B(x, \rho)) \geq \delta w(B(x, \rho) \cap B_R)$ .

Coifman e Weiss ([CW]) hanno provato che per uno spazio omogeneo e per ogni sfera di raggio  $R$  esiste un insieme finito massimale di punti della sfera che distano a due a due più di  $\frac{R}{2^n}$ .

Effettuiamo una successione di ricoprimenti alla maniera seguente: per ogni  $n \geq 1$  sia  $\{x_1^{(n)}, \dots, x_{I_n}^{(n)}\} \subset B_R$  un insieme massimale con  $d(x_i^{(m)}, x_j^{(n)}) > \frac{R}{2^n}$

e consideriamo le famiglie

$$R^{(P)} = \{B(x_i^{(P)}, \frac{R}{2^p}) \mid i = 1, \dots, I_p\} \text{ di ricognimenti di } B_R.$$

Poniamo poi

$$S_p = \{B(x_i^{(P)}, \frac{R}{2^{p-1}}) \mid i = 1, \dots, I_p, B \text{ interseca } E \text{ in modo consistente,}$$

$$x_i \notin \bigcup_{h=1}^{p-1} \bigcup_{B \in R^h} B, B(x_i^{(h)}, \frac{R}{2^{h-1}}) \text{ interseca } E \text{ in modo consistente}\}$$

Essenzialmente utilizzando la proprietà di duplicazione per la misura  $w(x)dx$  e il fatto che i punti di  $E$  sono punti di Lebesgue, si prova che  $\forall x \in E \exists p \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N}$  tale che

$$x \in B(x_i^{(P)}, \frac{R}{2^p}) \text{ e } w(E \cap B(x_i^{(P)}, \frac{R}{2^{p-1}})) \geq \delta w(B(x_i^{(P)}, \frac{R}{2^{p-1}}))$$

Definiamo per ogni  $B \in \bigcup_{p \in \mathbb{N}} S_p, \tilde{B}_B$  come segue: sia  $B \in \bigcup_{p \in \mathbb{N}} S_p$  allora  $\exists p \in \mathbb{N}, \exists i \in \{1, \dots, I_p\}$  tali che  $B \equiv B(x_i^{(P)}, \frac{R}{2^{p-1}}) \in S_p$  con  $x_i^{(P)} \in B(x_j^{(p-1)}, \frac{R}{2^{p-1}})$  per un certo  $j \in \{1, \dots, I_{p-1}\}$ ; poniamo  $\tilde{B}_B = B(x_j^{(p-1)}, \frac{R}{2^{p-2}})$ . Risulta  $B \subset \tilde{B}$  e risulta che  $\tilde{B}_B$  non è consistente con  $E$ .

Poniamo poi  $\tilde{E}_\delta = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \bigcup_{B \in S_p} (\tilde{B}_B \cap B_R)$ . Si trova facilmente che  $\tilde{E}_\delta \subseteq E_\delta, E \subseteq \tilde{E}_\delta$  in quanto ogni punto di  $E$  è un punto di Lebesgue; si prova inoltre che per  $0 < \alpha < \frac{1}{4}$  le omotetiche di  $B$  ( $\alpha B$ ) sono disgiunte. Allora, ricordando che la proprietà di duplicazione vale anche per le  $B \cap B_R$  (vedi prop. 2.10 [FL2] e Lemma 4 di [C])

$$w(E) = w(\tilde{E}_\delta \cap E) \leq \sum_{\substack{p \in N \\ B \in S_p}} w(\tilde{B}_B \cap E) < \delta \sum_{\substack{p \in N \\ B \in S_p}} w(\tilde{B}_B \cap B_R) \leq (**)$$

$$\leq \delta D \sum_{\substack{p \in N \\ B \in S_p}} w(B \cap B_R) \leq C \delta \sum_{\substack{p \in N \\ B \in S_p}} w(\alpha B \cap B_R) = C \delta w\left(\bigcup_{\substack{p \in N \\ B \in S_p}} (\alpha B \cap B_R)\right) \leq$$

$$\leq C \delta w\left(\bigcup_{\substack{p \in N \\ B \in S_p}} (B \cap B_R)\right) \leq C \delta w\left(\bigcup_{\substack{p \in N \\ B \in S_p}} (\tilde{B}_B \cap B_R)\right) = C \delta w(\tilde{E}_\delta) \leq C \delta w(E_\delta).$$

Passiamo alla dimostrazione della disuguaglianza di Harnack (T. 3).

Si seguono le seguenti tappe:

Proposizione 4. Sia  $u \in DG_m(\Omega)$ ,  $u \geq 0$ , allora per ogni  $q > 0$  esiste  $C \equiv C(\bar{x}, q)$  tale che

$$(7) \quad \sup_{B_{R/2}} u \leq c \left( \frac{1}{w(B_R)} \int_{B_R} u^q w \, dx \right)^{1/q}$$

Proposizione 5. Sia  $u \geq 0$ ,  $-u \in DG_m(\Omega)$  allora  $\forall q > 0$ ,  $q < \frac{1}{C_0}$  (vedi dimostrazione)

$\exists c > 0$  dipendente da  $q$  tale che

$$(8) \quad \left( \frac{1}{w(B_R)} \int_{B_R} u^q w \, dx \right)^{1/q} \leq c \inf_{B_{4R}} u$$

Dalla Proposizione 4 e dalla Proposizione 5 segue immediatamente il Teorema 3.

(\*\*) Per la proprietà di duplicazione della misura  $w(x)dx$ .



Dimostrazione della Proposizione 4. Se  $q \geq m$  (la (7) segue dalla (7) del Teorema 3 di [S], che limita il suppo in termini di  $w(B(K,R))$  e  $\int_{B(K,R)} |u-k|^m w dx$ , con  $K = 0$ , e dalla disuguaglianza di Hölder. Se  $0 < q < m$  si utilizza la disuguaglianza  $ab \leq \epsilon a^{\frac{m}{m-q}} + C(\epsilon) b^{\frac{m}{q}}$ ,  $a, b \geq 0$  e si applica il Lemma 2.1. di [GG] che limita la crescita di una funzione non negativa che soddisfa una opportuna disuguaglianza.

Per la prova della Proposizione 5 è necessario utilizzare un risultato la cui dimostrazione è contenuta nella dimostrazione del Lemma 4.1. di [S] (vedi anche Lemma 5.1. di [S1]).

"Sia  $h > k > k_0$ , se  $w(B(k_0, R)) \leq \gamma w(B_R)$  con  $\gamma \in ]0, 1[$

allora

$$(9) \quad \frac{m+1}{(h-k)^2} (w(B(h,R)))^{\frac{1}{2}} \leq c(\gamma) R^{\frac{m+1}{2}} (w(B_R))^{\frac{1-l}{2}} \int_{B(K,R)} |\nabla_\lambda u|^m w dx)^{\frac{m+1}{2m}} \cdot (w(B(K,R)) - w(B(h,R)))^{\frac{m-1}{2m}}$$

con  $l > 1$  costante che appare nel seguente Teorema di immersione:

"Sia  $u \in W_m^1(\Omega)$   $\beta > 0$  tale che  $w(\{x \in B_R | u(x) = 0\}) \geq \beta w(B_R)$ ; allora  $\exists l > 1$  dipendente da  $m, w$  e  $\lambda_j$  tale che

$$\left( \int_{B_R} |u|^m w dx \right)^{\frac{1}{2m}} \leq C R (w(B_R))^{\frac{1-l}{2m}} \left( \int_{B_R} |\nabla_\lambda u|^m w dx \right)^{1/m}$$

([S1] T.3).

Proposizione 5.1. Sia  $u \geq 0$ ,  $-u \in DG_m(\Omega)$ ,  $\tau > 0$ ,  $\gamma \in ]0, 1[$ , se  $w(\{x \in B_R | u < \tau\}) \leq \gamma w(B_R)$  allora:

$$(10) \quad i) \quad w(\{x \in B_R \mid u < \frac{\tau}{2^{v+1}}\}) \leq C(\gamma) \left(\frac{\gamma}{v}\right)^{\frac{\ell(m-1)}{2m}} w(B_R)$$

$$(11) \quad i') \quad \inf_{B_{R/2}} u \geq \lambda(\gamma)\tau$$

$$(12) \quad ii) \quad \inf_{B_{4R}} u \geq \lambda(\gamma)\tau \quad \text{con} \quad 0 < \lambda(\gamma) < 1$$

Dimostrazione. Osserviamo anzitutto che

$$w(\{x \in B_R \mid -u > -\tau\}) = w(\{x \in B_R \mid u < \tau\}) \leq \gamma w(B_R)$$

e quindi si può applicare la (9) alla funzione  $-u$  per  $h > k > -\tau$ ; scegliendo

$$h = \frac{-\tau}{2^{s+1}}, \quad k = \frac{-\tau}{2^s}, \quad s \in \mathbb{N} \quad \text{e utilizzando le proprietà di duplicazione per la}$$

misura  $w(x)dx$ , si ottiene

$$\begin{aligned} & \left( w(\{x \in B_R \mid u < \frac{\tau}{2^{s+1}}\}) \right)^{\frac{2m}{\ell(m-1)}} \leq \\ & \leq C(\gamma) \left( w(B_R) \right)^{\frac{2m(1-\ell)+\ell(m+1)}{\ell(m-1)}} \left( w(B(-\frac{\tau}{2^s}, \ell)) - w(B(-\frac{\tau}{2^{s+1}}, R)) \right). \end{aligned}$$

Sommando poi per  $s$  da 0 a  $v$  si ottiene

$$v \left( w(\{x \in B_R \mid u < \frac{\tau}{2^{v+1}}\}) \right)^{\frac{2m}{\ell(m-1)}} \leq C(\gamma) \left( w(B_R) \right)^{\frac{2m(1-\ell)+\ell(m+1)}{\ell(m-1)}} \gamma w(B_R)$$

da cui la (10) (si è sfruttata l'ovvia inclusione

$$\{x \in B_R/u < \frac{\tau}{2^{v+1}}\} \subseteq \{x \in B_R/u < \frac{\tau}{2^{s+1}}\}$$

La (11) si prova applicando ancora la (7) di [S] a  $-u$  per  $K = -\tau$  ottenendo quasi immediatamente

$$(13) \quad \inf_{B_{R/2}} u \geq \frac{1}{2} \tau$$

purché  $\gamma \in ]0, (\frac{1}{2c})^{\frac{m}{\theta}}[$ , con  $C$  e  $\theta$  costanti che appaiono nella (7) di [S]

$$\text{Si fissa ora } v \in \mathbb{N} \quad \text{tale che } \gamma' \equiv c(\gamma) \left(\frac{\gamma}{v}\right)^{\frac{2(m-1)}{2m}} \leq \left(\frac{1}{2c}\right)^{\frac{m}{\theta}} \text{ con}$$

$c(\gamma)$  costante che appare nella (10); allora per la (10) stessa si ha

$$w(\{x \in B_R/u < \frac{\tau}{2^{u+1}}\}) \leq \gamma' w(B_R) \text{ e quindi, potendo applicare la (13) si ha:}$$

$$(14) \quad \inf_{B_{R/2}} u \geq \frac{1}{2} \frac{\tau}{2^{v+1}} \equiv \lambda(\gamma)$$

Si noti che  $\lambda(\gamma) \in ]0, 1[$ . La dimostrazione della (12) si conclude osservando che per la proprietà di duplicazione della misura  $w(x)dx$  esiste  $\alpha >$  tale che

$$w(\{x \in B_{8R}/u \geq \tau\}) \geq w(\{x \in B_R/u \geq \tau\}) \geq$$

$$\geq (1-\gamma) w(B_R) \geq (1-\gamma) \left(\frac{1}{8}\right)^\alpha w(B_{8R})$$

il che equivale a  $w(\{x \in B_{8R}/u < \tau\}) \leq \gamma^\alpha w(B_{8R})$  e per la (14) si ha la (12).

Dimostrazione della Proposizione 5. Se  $u = 0$  la (8) è ovvia. Sia  $u$  non identicamente nulla; allora  $\exists t > 0$  tale che

$$E = \{x \in B_R / u(x) \geq \lambda^{i-1} t\} \equiv A_t^{i-1}.$$

ha  $w(E) > 0 \forall i \in \mathbb{N}$ . ( $\lambda = \lambda(\gamma)$  è la costante che appare nella (12)). Applichiamo il Lemma 3 all'insieme  $E$ . Sia  $\delta \in ]0, 1[$  fissato (supponiamo  $C\delta < 1$  con  $C$  costante che appare nel Lemma 3), esistono allora  $z \in B_{R,\rho} > 0$  tali che  $w(E \cap B(z, \rho)) \geq \delta w(B(z, \rho))$ , allora  $B(z, 4\rho) \cap B_R$  è uno degli insiemi che definiscono  $E_\delta$  nel Lemma 3; dalla (12), poichè ne segue  $w(\{x \in B(z, \rho) / u < \lambda^{i-1} t\}) \leq (1-\delta)w(B(z, \rho))$ , segue  $u(x) \geq \lambda^i t \quad \forall x \in B(z, 4\rho)$  e quindi, poichè  $E_\delta$  è l'unione di tutti tali insiemi  $(B(z, 4\rho))$  intersecati con  $B_R$ , allora su  $E_\delta$  è  $u \geq \lambda^i t$  e quindi si hanno due possibilità:

$$i) \quad w(\{x \in B_R / u \geq \lambda^i t\}) \geq u(E_\delta) = w(B_R)$$

oppure

$$ii) \quad w(\{x \in B_R / u \geq \lambda^i t\}) \geq w(E_\delta) \geq \frac{1}{C\delta} w(E) = \frac{1}{C\delta} w(\{x \in B_R / u \geq \lambda^{i-1} t\}).$$

In ogni caso si conclude: se  $w(A_t^0) \geq C^{S-1} \delta^S w(B_R)$  si ha:

$$w(A_t^{S-1}) \geq \frac{1}{C\delta} w(A_t^{S-2}) \geq \dots \geq \frac{1}{(C\delta)^{S-1}} w(A_t^0) \geq \delta w(B_R)$$

da cui

$$w(\{x \in B_R / u < \lambda^{S-1} t\}) \leq (1-\delta) w(B_R)$$

allora per la (12)

$$\inf_{B_{4R}} u \geq \lambda^S t$$

Perchè sia  $w(A_t^0) \geq C^{s-1} \delta^s w(B_R)$  basta scegliere

$$s \geq \log(c \frac{w(A_t^0)}{w(B_R)}) / \log(C\delta) \text{ e allora}$$

$$\inf_{B_{4R}} u \geq C_1 t^{\frac{w(A_t^0)}{w(B_R)} C_0}$$

$$\text{da cui } \frac{w(A_t^0)}{w(B_R)} \leq C_1^{-1} t^{-\frac{1}{C_0}} (\inf_{B_{4R}} u)^{\frac{1}{C_0}}$$

Ora poichè

$$\frac{1}{w(B_R)} \int_{B_R} u^q w dx = \frac{1}{w(B_R)} (q \int_{\xi}^{+\infty} t^{q-1} w(A_t^0) dt + q \int_0^{\xi} t^{q-1} w(A_t^0) dt)$$

ponendo  $\xi = \inf_{B_{4R}} u$  e  $q < \frac{1}{C_0}$  si ha

$$\frac{1}{w(B_R)} \int_{B_R} u^q w dx = \frac{q}{w(B_R)} \int_{\xi}^{+\infty} t^{q-1} w(A_t^0) dt + \xi^q \leq$$

$$\leq q C_1^{-1} \int_{\xi}^{+\infty} t^{q-1-1/C_0} (\inf_{B_{4R}} u)^{1/C_0} dt + (\inf_{B_{4R}} u)^q = \frac{q C_1^{-1}}{\frac{1}{C_0} - q} (\inf_{B_{4R}} u)^q + (\inf_{B_{4R}} u)^q$$

da cui

$$(\frac{1}{w(B_R)} \int_{B_R} u^q w dx)^{\frac{1}{q}} \leq C \inf_{B_{4R}} u$$

NOTA - Il risultato precedente vale anche per i quasi-minimi ([G],[GG2],[BT]):

" $u \in W'_U(\Omega)$  è un quasi-minimo per il funzionale  $F$ , con costante  $Q$  se, per ogni  $\phi \in W'_m(\Omega)$ ,  $\text{supp} \phi \subset \Omega$ , è

$$F(u, \text{supp} \phi) \leq Q F(u + \phi, \text{supp} \phi)".$$

BIBLIOGRAFIA

- [BT] E. Di BENEDETTO, N.S. TRUDINGER, "Harnack inequalities for quasi-minima of variational integrals", Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. 1, n. 4, 1984.
- [C] A.P. CALDERON, "Inequalities for the maximal function relative to a metric", Studia Math. 57, 1976.
- [CW] RONALD L. COIFMAN, G. WEISS, "Analyse Harmonique Non-commutative sur certain Spaces Homogenes", Springer-Verlag-Berlin-Lecture Notes in Mathematics, 242.
- [DG] E. De GIORGI, "Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari", Mem. Accad. Sci. Torino cl. Fis. Mat. Nat. (3), 3, 1957.
- [FL1] B. FRANCHI, E. LANCONELLI, "Une metrique associee a une classe d'operateurs elliptiques degeneres", Proceedings of the meeting "Linear Partial and Pseudo-Differential Operators", Torino 1982, Rend. Sem. Mat. Univ. e Politec. Torino.
- [FL2] B. FRANCHI, E. LANCONELLI, "Holder regularity Theorem for a class of linear non uniformly elliptic operators with measurable coefficients"; Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Serie IV, Vol. X, n. 4 1983.
- [FL3] B. FRANCHI, E. LANCONELLI, "An embedding theorem for Sobolev Spaces related to non smooth vector fields and Harnack inequality" Comm. in Partial Differential Equations, Vol. 9 (13), 1984.
- [FS] B. FRANCHI, R. SERAPIONI, "Pointwise estimates for a class of strongly degenerate elliptic operators: a geometrical approach", Preprint 1986.
- [G] M. GIAQUINTA, "An introduction to the regularity for non-linear elliptic systems", Mathematik Department eth Zurich und Forschungsinstitut fur Mathematik eth Zurich, 1983/84.
- [GG1] M. GIAQUINTA, E. GIUSTI, "On the regularity of the minima of variational integrals", Acta Math. 148, 1982.
- [GG2] M. GIAQUINTA, E. GIUSTI, "Quasi-minima" Ann. Ist. Henri Poincaré, Vol. 1, n. 2, 1984.
- [KS] N.V. KRYLOV, M.V. Safanov, "Certain Properties of solutions of parabolic equations with measurable coefficients", Izvestia Akad. Nauk. SSSR. t. 40, 1980, English transl. Math. USSR, Izv. t. 16, 1981.

- [M] G. MODICA, "Quasi minimi di alcuni funzionali degeneri", Ann. Mat. Pura Appl. 142, 1985.
- [NSW] A. NAGEL, E.M. STEIN, S. WAINGER, "Balls and metrics defined by vector fields I: basic properties", Acta Math. 1955, 1955.
- [S] V. SCORNAZZANI, "Sulla regolarità Hölderiana dei minimi di certi funzionali", Sem. di Anal. Mat. Dip. Univ. BO, 1986/87.
- [S1] V. SCORNAZZANI, "On Hölder Theorem and Harnack inequality for the minimizers of some new functionals", in via di pubblicazione.